المحاضرة الرابعة

$$V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

في حالة المتغيرة العشوائية مستمرة :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	١
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
(X-μ)²	1	0	1	
(X-μ)² * P(X)	1/4	0	1/4	V(X) = 1/2

مثال ٢. لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية؛ أحسب تباين X.

$$\mu = 4/3 \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 * 0dx + \int_{0}^{2} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 0dx = 0 + \frac{1}{2}x\left(x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9}\right)_0^2 + 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{16x}{9}\right)_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + \frac{32}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

خصائص التباين

V(X) = E(X²) - E(X)²
V(CX) = C²V(X) , V (C) = 0

في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما

V(X - Y) = V(X) + V(Y) , V(X + Y) = V(X) + V(Y)

مثال: نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) باستخدام الصيغة **V(X) = E(X²) - E(X)²** .

لتكن المتغيرة Y = 2X. أحسب V(Y) ، نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عيها. أحسب تباين المتغيرة W حيث: W = Z - Y

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X)^2$	0	1	4	
$(X)^2$ * P(X)	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - 1 = 1/2$
$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\ (1/2) = 2.$
$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) +V(2X) = V(Z) + 2^2V(X).$
$V(Z) = E(Z^2) – E(Z)^2 = (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-(1/6)[1+2+3+4+5+6] = 70/6$
$V(W) = (70/6) + 4\ (1/2) = 82/6 = 13.67$

المتغيرة المعيارية Variable centrée réduite

يمكن أن نلحق بأي متغيرة عشوائية X متغيرة معيارية (تسمى أيضا المتغيرة المركزية) ويرمز لها *X . تلحق المتغيرة المعيارية بالمتغيرة الحقيقية من أجل المقارنة لأن المتغيرة المعيارية ليس لها وحدة كالمتر أو الساعة ... وإنما هي تعبر عن كل قيمة x ل X من خلال المسافة بين x والتوقع μ محسوبة لس بالوحدة الأصلية وإنما بالانحرافات المعيارية.

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

من خلال خصائص التوقع والتباين نستخرج التوقع والتباين للمتغيرة المعيارية.

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] = 0$$

$$V(X^*) = E\left[\left(X^* - E(X^*)\right)^2\right] = E\left[\left(X^* - 0\right)^2\right] = E(X^{*2}) = E\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}E\left(X-\mu\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال: أحسب *X من أجل متوسط ٧٠، انحراف معياري ٥، وX يساوي: ٥٥، ٦٠، ٥٠، ٧٥، ٨٠، ٧٠.

الجواب: القيم هي: -٣، -٢، -٤، ١، ٢، ٠.

مثال ٢. يتدرب عاملان أحمد وعلي من أجل المشاركة في ماراتون عيد العمال ١ ماي. يشترط يوم المسابقة أن يكون وزن المترشح لا يتجاوز المجال μ ± 1.5σ .

إذا كان الوزن المتوسط بالكغ هو μ = 70 والانحراف المعياري هو ٥ كغ. هل سيقبل العاملان أحمد وعلي إذا كان وزنهما: ٧٧ كغ، و٨٠ كغ؟

الجواب: مجال القبول هو من ٦٢.٥ كغ إلى ٧٧.٥ كغ، لذلك فسيرفض علي ويقبل أحمد.

خلاصة

التوقع الرياضي و التباين هي أهم المؤشرات المعبرة عن خصائص المتغيرة و يحسبان كما يلي، حسب كون المتغيرة متقطعة أو مستمرة:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

لكل من التوقع و التباين ٤ خصائص أساسية تتمثل فيما يلي:

E (C) = C توقع عدد ثابت	V(C) = 0
E(CX) = CE(X)	$V(CX) = C^2V(X)$
E(X+Y) = E(X) + E(Y)	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما V(X + Y) = V(X) + V(Y) V(X - Y) = V(X) + V(Y) ,
E(XY) = E(X)E(Y) .في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما	$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

من أجل المقارنة بين المتغيرات تستخدم المتغيرة المعيارية التي تسمح بالتعبير عن قيمة x ليس من خلال وحداتها الأصلية (كغ، متر، زمن، ...) وإنما بعدد الانحرافات المعيارية التي تفصل بين القيمة x والتوقع الرياضي.

التوقع الرياضي والتباين للمتغيرة المعيارية $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ هما على التوالي ٠ و ١.

لحساب التوقع الرياضي لدالة ما في X (مثلا التباين، أو X^2) نضرب قيم الدالة في الاحتمالات المقابلة لX:

$$E(Y) = E(g(x)) = \sum_x g(x) f(x)$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$